

# 論証図形の指導の研究

## 題意把握を中心とした基礎的な指導について

東頸城郡安塚町立小黒中学校教諭 白川 昭 夫

### I はじめに

図形の論証教材が中学校にとりいれられてから数年になるが、未だ最もむずかしい教材の一つとされている。学力テストの結果をみても正答率は低く、この教材の学習についてこれる生徒はクラスの半分ぐらいたとも言われているのが偽らざる現場の実態である。

論証は数学の一つの大きな柱であり、図形教材がそのよき材料であってみれば、むずかしいからと言ってそれを避けて通るわけにはいかない。図形の論証教材は一般性が高く、多様性があり、その上、はっきりした論理を要求するために入りづらく取り組みにくい。その反面、論証能力を高めるにはよい教材でもある。教材内容そのものにも現代化を旨としていくつかの改革の意見と実践が試みられているが、現在採用されているユークリッド幾何は論理の手法を学習するに適したすぐれた教材である。いたずらに難解な内容は整理をしていく必要はあるが、むずかしい教材だから内容を削ってやさしくすればよいということでは根本的な解決にはならない。

この教材のもつよさ — この教材の教育目的 — 論理の仕方を学ぶことを目指しながら「わかる授業をするにはどのような指導が効果的か」という古くて新しいこの課題に対して再検討を加えていく必要を痛切に感ずる。

### II 研究の目的

ある命題を証明するには、定義を理解し、命題の仮定、結論を明確にした上で、既知の定理を用いて推論をすすめる、それを簡潔に記述すればよい。したがって、論証の土台は命題の題意の把握である。また、推論では、その問題解決に必要な定理を選択し、仮定から結論が必然的に導かれるように思考をめぐらしていく。題意の完全な把握の上になつて、直観し、それを論理づけ、また直観しそれを筋道立ててみることのくりかえしの中で問題が解決される。これらの学習を通じて、定義をつぎつぎにおしすすめていくと無定義用語の必要性が、また、同じように、定理をどんどん追求していくと公理の必要性が理解される。ここに至って、論証における論理のしくみがはっきりと浮き彫りにされてくるのである。

このような観点から、図形の論証指導には次の3つの方向が考えられる。

- (1) 定義の理解、命題の仮定、結論を明確にし題意を把握する能力を高める指導
- (2) 定理の理解を深め、推論する能力を高める指導
- (3) 論理のしくみを理解させる指導

これらは時間的な段階を示すものではなく、並列的なあらわれ方をもっている。ここでは(1)の効果的な指導法について研究し、さらに、(2)の指導を効果的にすることをねらいとした。

### Ⅲ 研究仮説

文章を図形に表わしたり、さらに、それを記号化したり、逆に、図形を文章になおしたりすることを目的とする学習を論証の学習の前に集約的に指導し、その後の学習において図形を中心とした指導を重点的に行なっていくならば、命題の題意を把握する能力を高めることに効果がある。また定理の理解にも効果的であり、それらの影響をうけて推論の能力を伸ばすことにも有効である。

### Ⅳ 研究の内容と方法

#### 1. 研究の対象

本校の2年生全員(50名)を実験群として、この仮説にもとづいて授業を進めているため、他校に協力校を依頼しこれを統制群とする二群法による実験を計画した。

知能検査および標準学力検査の偏差値を資料として、上位・中位・下位に同じ程度の生徒を各10名ずつ選び、それぞれ上位群・中位群・下位群として研究の対象とした。

図表1 知能テストと標準学力テストによる有意差の検定

		上 位 群		中 位 群		下 位 群	
		実験群	統制群	実験群	統制群	実験群	統制群
知能 テスト 値	平均 値	60.3	62.1	51.0	53.0	42.4	42.6
	標準 偏差	3.5	4.8	3.8	3.2	3.0	3.3
	平均の差の検定	$P\{ t  \geq 0.9\} > 0.05$		$P\{ t  \geq 1.2\} \geq 0.05$		$p\{ t  \geq 0.1\} > 0.05$	
	分散の差の検定	$F_0 = 1.9$		$F_0 = 1.7$		$F_0 = 1.2$	
標準 学力 テスト 値	平均 値	64.7	64.1	53.0	54.0	41.8	41.7
	標準 偏差	3.4	2.5	2.9	4.2	2.7	3.1
	平均の差の検定	$P\{ t  \geq 0.4\} > 0.05$		$P\{ t  \geq 0.6\} > 0.05$		$P\{ t  \geq 0.7\} > 0.05$	
	分散の差の検定	$F_0 = 1.9$		$F_0 = 2.2$		$F_0 = 1.4$	

t検定、F検定の結果両群に差が認められないことが検証された。

#### 2. 研究内容

本校の生徒(実験群)には、図形編「1章図形の合同」の学習が終了し、「2章定理と証明」に入る前の時点で、次に述べるような作図練習を行なった。

図表2

○ 実験群	図形の合同	……	作図練習 3	……	定理と証明 195	教科書は「学図」
○ 統制群	図形の合同	……	定 理 と 証 明	225	数字は時間数	

##### (1) 作図練習の指導内容

この作図練習は、作図を中心に次の3点について指導した。

##### ア 文章 → 図形

文章を図形化し、等長、等角、直角、平行線には符号を記し、図形をはっきりさせる。

イ 文章を図形化し、図の中に記入された符号を手がかりに、文章のもつ意味を記号を用いて表わす。

## ウ 図形 → 文章

図形を見て、その条件にしたがってかけるような文章をつくる。この学習により、ア、イの理解をより深めていく。

これらの内容のものを「作図練習帳」として印刷物にまとめ生徒に配布し3時間で指導した。

### <指導内容抜粋>

これから学習する図形教材の基礎学習として作図の練習をしましょう。ここで行なう作図は技術科等でかく作図とは少しちがって、図形の性質を学習するためのものですから、次の作図の方法をよく読んで練習しましょう。

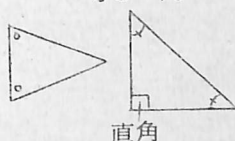
#### 作図の方法

- ① 作図は、まずフリーハンドで、記号をつけながら図形をかいてみて、およそ全体のようなすがわかったら、定木やコンパスを用いてかく。(およその正確さでよい)
- ② 図の中で、等しい線分、等しい角、直角、平行線には次のような符号を記入して、図形をみたらすぐにその図形を判断することができるようにすること。

#### 等しい線分

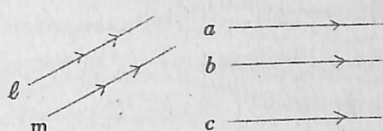


#### 等しい角



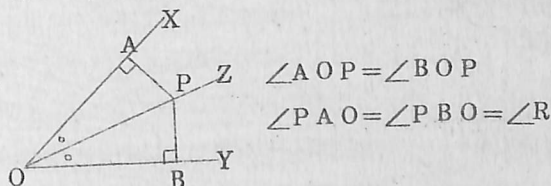
直角

#### 平行線



- ③ 図をかいたら、その図の中の相等を読みとって、それを文字を使って記号の式で表わすこと。

例 角XOYの二等分線OZ上に点Pをとり、点PからOX, OYに垂線PA, PBをおろす。

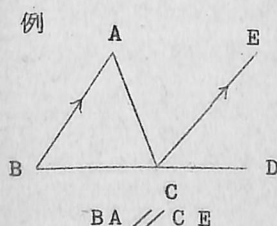


- ②, ③の練習問題は36題(指導時間

は2時間)

図表3 <指導内容と時間配当>

- ④ つぎの各問題は、そこに書いてある図を、その条件にしたがってかける文章を作る問題です。例にならってその文章をかきなさい。文章の始めの部分を何からかくか、またどんな順序にかくかがたいせつです。また、むだの多いくどくどした文章でなく、すっきりとしたわかり易い表現をすることも必要です。



○よい方

△ABCの辺BCを延長してCDとし、Cを通つてBAに平行な直線CEをひく。

○よくない方

線分BCを延長してCDとし直線BC外の点Aとして△ABCをつくり、点Cを通つてBAに平行な直線CEをひく。

#### 2章 定理と証明

##### 1. 証明の意味

	練習	実験
① 図形の性質の確かめ方	1	1
② 用語の定義	1	1
③ 仮定と結論	1	1
④ 証明のしかた	2	2
⑤ 図形の基本性質	1.5	1
練習	0.5	0.5
→ 予備テスト		

##### 2 定理のまとめ

	練習	実験
① 角と平行線	1.5	1
② 二等辺三角形	1.5	1
③ 垂直二等分線	1.5	1.5
④ 角の二等分線	2.5	2
⑤ 平行四辺形	3	2
→ 評価テスト		
⑥ 多角形の面積	4	4
練習	1.5	1.5



④の練習問題は20題(1時間) 練習問題は教科書にでてくるものを多くとりいれてある。

実験群の指導は、上に述べた作図練習の後「定理と証明」の単元に入るがここでも図形を中心とする指導を行なった。

定義 $\rightleftarrows$  勝形 命題 $\rightleftarrows$  図形 定理 $\rightleftarrows$  図形 のように図形による定義の表現、定理の表現を行なうことによって学習内容を視覚にうたえて単純化するとともに、記号による式表現を理解させるようにした。

両群とも授業時数を図表3のようにし、統制群は教科書および指導書にそって授業を展開した。実験群は重点的な指導を行なって後半において時間授業時数を短縮した。また、授業中に取り扱った練習問題は、教科書と自主学習という問題集を用い両群とも同じものにした。

### 3. 結果の測定方法

定義の理解、題意の把握、推論の能力の実態を測定することはきわめてむずかしい。そのもの自体をつきとめることは困難なので、各々のもついろいろな側面を考察し、それらの側面からの評価の観点を定め、それにもとづいて評価問題を作成しテスト法による測定を計画した。なお、評価問題の難易度の測定と問題形式に慣れさせるために、予備テストを行なった。(図表3を参照)

各項目別の評価の観点 数字は出題問題番号

#### 1. 定義の理解 (テスト1)

- (1) 定義にしたがって作図することができるか。①②
- (2) 定義の文章で正しくかくことができるか。③④
- (3) 定義にしたがって命題の中にある用記を記号化することができるか。⑤⑥
- (4) 図形の中から定義にしたがって図形を正しく読みとることができるか。⑦⑧
- (5) 定義と性質を区別して理解しているか。⑨⑩

#### 2. 題意の把握 (テスト2)

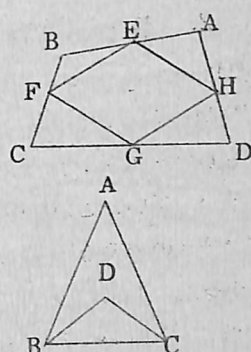
- (1) 命題を図形化することができるか。⑪⑫
- (2) 略図付きの命題から、仮定と結論を図の中に符号で示すことができるか。⑬⑭
- (3) 略図付きの命題から、仮定と結論を記号で表わすことができるか。⑮⑯
- (4) 命題だけが与えられて、それから仮定と結論を記号化することができるか。⑰⑱

#### 3. 推論の能力 (テスト3)

- (1) 仮定よりどの程度推論することができるか。⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓
- (2) 結論から逆に推論することがどの程度できるか。㉔ ㉕ ㉖
- (3) 問題解決に必要な不足している条件を見い出したり、定理や公理を選択することができるか。㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛
- (4) 問題解決に必要な補助線をひくことができるか。㉜ ㉝ ㉞ ㉟
- (5) 筋道をたてて考え、記述することができるか。㊱

評価問題例

⑥四角形  $ABCD$  の中点を順に結ぶとそこのできる四角形  $EFGH$  は平行四辺形になることを証明せよ。この問題の結論を証明するには定義にしたがって何を言えばよいか、記号を用いて式でこたえよ。



⑫ 三角形  $ABC$  の  $\angle B$ ,  $\angle C$  の二等分線の交点を  $P$  とし,  $P$  を通り  $BC$  に平行な直線が  $AB$ ,  $AC$  と交わる点を  $D$ ,  $E$  とする図形をかけ。

③⑧ 右の図において,  $AB=AC$  である。また,  $\angle ABC$  と  $\angle ACB$  のそれぞれの二等分線の交点を  $D$  とする。このとき,  $\triangle DBC$  においてわかることからすべて式でかけ。

#### Ⅳ 研究結果とその考察

##### 1. テストの結果と平均の差の検定

各問題は 1, 0 採点とした。推論の能力では, 例えば 38 の場合は 1 つでも正しいものがあれば正答とし, いくつも正答をだしたのものには, 別にその数をまとめ思考の多面性の測定の資料とした。

図表 4 問題別の優劣分析法による検定

※印は 5% ( $Z_0 \geq 2$ ), ※※印は 1% ( $Z_0 \geq 3$ ) の危険率で弁別力が認められる。

問題番号	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮	⑯	⑰	⑱	⑲
Z 値	4.1	4.7	2.9	2.5	3.8	3.9	3.5	2.9	3.5	4.2	3.2	3.0	2.5	3.5	3.5	2.2	4.5	4.8	
差の有無	※※	※※	※	※	※※	※※	※※	※	※※	※※	※※	※※	※	※※	※※	※	※※	※※	
問題番号	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
Z 値		3.4	2.1	4.5	2.7	3.4	2.7	1.0	3.2	3.2	2.1	0.4	3.2	3.2	3.2	3.9	4.5	3.4	3.7
差の有無		※※	※	※※	※	※※	※	○	※※	※※	※	○	※※	※※	※※	※※	※※	※※	

上の表のように, 各問題別に妥当性を検定し, 妥当性の少ない問題を各項目別の問題数を調整しながら集計より除外した。(図表 4 の ○ 印のついている問題が除外されたもの)

次にテストの結果と平均の差の検定をかかげる。

図表 5 (※印は  $t$  検定の結果 5%, ※※印は 1% の危険率で差が認められる)

		上 位 群		中 位 群		下 位 群	
		実験群	統制群	実験群	統制群	実験群	統制群
テスト1 定義の理解 (10点満点)	平均値	8.8	7.1	7.7	5.1	3.1	1.5
	標準偏差	1.2	1.7	1.3	1.4	1.9	1.4
	差の有無	※		※※			
テスト2 題意の把握 (10点満点)	平均値	7.0	5.3	6.0	4.1	2.8	1.3
	標準偏差	0.8	1.3	1.3	1.2	2.0	1.0
	差の有無	※※		※※			
テスト3 推論の能力 (12点満点)	平均値	10.8	10.6	8.1	6.1	5.7	3.8
	標準偏差	0.7	1.0	2.3	1.7	2.6	2.4
	差の有無			※			
テスト3の分析による 思考の多面性	平均値	14.3	12.3	10.6	7.6	5.6	4.0
	標準偏差	2.0	2.3	3.7	3.6	3.9	2.5
	差の有無						

## 2. 結果の考察

### (1) 評価の観点1(定義の理解)について

統制群では、定義の文章表現が不明確である。正方形の定義では、4つの辺が等しく、4つの角が等しい四角形、と3つの要素による表現が必要であるところ、その一部が欠けた表現になっているものが多い。この項目では、下位群においても両群の間に有意差が認められた。また、定義と性質の分離の項でも理解に差があった。定義の記号による表現は、特に中位群において両群の差が大きかった。上記の項目以外では、下位群においては殆んど差はなく、上位群でも殆んど差はない。

### (2) 評価の観点2(題意の把握)について

仮定と結論の記号による式表現では、完全解答のみを正答としたため両群の差は大きい。結論よりも仮定の式表現の方が誤答が多く、統制群の方に結論と仮定の混合が目立った。また、特に、仮定、結論がともに2本以上の式表現となるものに混乱が多い。その点、実験群では、図形を媒介として式化するためか混合は少なく、図形→式化の見落としによる誤答の方が多かった。定義の理解の場合と同様に、中位群に大きな有意差が認められ、実験群の中位群と統制群の上位群が同程度の理解を示した。

### (3) 評価の観点3(推論の能力)について

中位群は、5%ぎりぎりの危険率において両群に有意の差が認められたが、上位群・下位群では差が認められなかった。仮定より推論する能力と結論より逆に推論する能力においては、両群の間にわずかながら差がある。思考の多面性については、もう少しのところで有意差が認められない。

しかしながら、図表5のテスト3、4の平均点の開き、および図表6の相関係数から推察すると実験群・統制群の間に検定の結果が有意差を認めていないけれども、それに近い差が感じられる。

図表6 各テスト結果の相関関係

## 3. 研究のまとめ

指導の期間が長く、その間にいろいろな要素が入りこむため断定的なことはいえないが資料にもとづいてまとめてみる。

仮説の前半「題意の把握に効果的である」ということが実証された。また、後半の「それらの影響をうけて推論の能力を高めることにも効果的である」ということが言える。

この指導の長所は、文章題を図形という視覚に訴えて単純化するところにある。そのことが問題を明確にし、思考の範囲をはっきりさせる。しかしながら、結果が示すようにこの指導で理解を容易にし学習の効果を上げたのは中位群までということである。この点に今後の研究が残されている。

### <参考文献>

現場のための教育研究法  
研修員研究集録 第5集  
統計学

新光閣書店  
県立教育センター  
玉川大学